



AAAAAA

Wien,
17.11.2016

Starrkörperbewegungen und Messpläne

Sehr geehrte Herren,

anbei erhalten Sie einige Ansätze, die bei der Lösung ingenieurgeodätischer Aufgabenstellungen gebräuchlich sind und von denen ich mir vorstellen könnte, dass sie einen Beitrag für die Arbeitsgruppe „Bodenbewegung“ der ÖGK liefern.

1. Translationen eines Starrkörpers

Ein pragmatischer Ansatz, um Translationen eines Grundstückes im homogenen Rutschbereich festzustellen, wird nachfolgend kurz vorgestellt. Der Ansatz basiert auf die Berechnung des Schwerpunktes. Die Grundlagen sind ausführlicher und strenger im Anhang 1 dargestellt, dort auch mit der Einbeziehung von Rotationen.

Ausgangspunkt ist die Bestimmung der Koordinaten der n Grenzpunkte zu zwei getrennten Zeitpunkten (weiterhin als Epoche 0 und Epoche 1 bezeichnet und durch entsprechende Indices gekennzeichnet) aus wiederholten Messungen. Es wird davon ausgegangen, dass sich die Anzahl der Grenzpunkte in den beiden Epochen nicht ändert. Infolge der Auswertung in jeder Epoche sind gegeben:

- \mathbf{x}_0 – der Vektor der ausgeglichenen Koordinaten zur Epoche 0,
- $\Sigma_{xx,0}$ – die zugehörige Kovarianzmatrix zur Epoche 0,
- \mathbf{x}_1 – der Vektor der ausgeglichenen Koordinaten zur Epoche 1,
- $\Sigma_{xx,1}$ – die zugehörige Kovarianzmatrix zur Epoche 1.

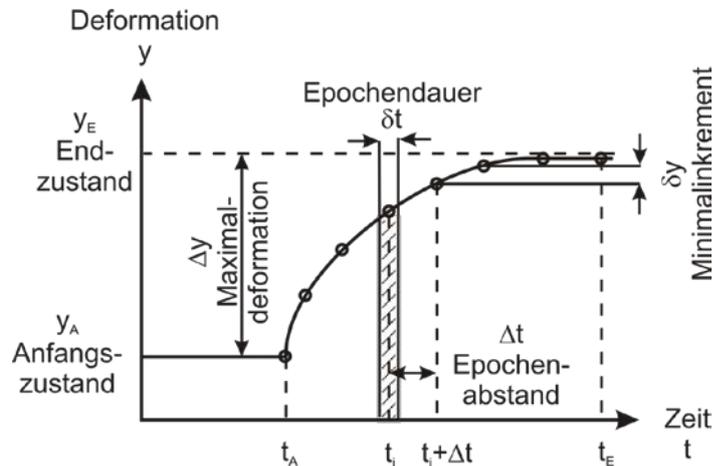
Die Kovarianzmatrizen $\Sigma_{xx,0}$ und $\Sigma_{xx,1}$ beinhalten unter anderem die Abbildung der Messpräzision auf die ausgeglichenen Koordinaten. Im Allgemeinen ist mit gegenwärtigen Instrumenten eine Präzision der ausgeglichenen Koordinaten erreichbar, die unter dem amtlich geforderten Qualitätsmaß liegt. Aus diesem Grund wird weiterhin von dem konservativen Fall ausgegangen, in dem die Varianz der Koordinaten aus der amtlich vorgeschriebenen Grenzwert abgeleitet ist. Diese Varianz wird weiterhin mit σ_x^2 bezeichnet. Der strengere Fall, in dem die tatsächlichen, aus der epochenbezogenen Ausgleichung resultierenden Kovarianzmatrizen der ausgeglichenen Koordinaten verwendet werden, ist im Anhang dargestellt.

Aus den ausgeglichenen Koordinaten resultieren epochenweise die Schwerpunktkoordinaten:

$$\mathbf{x}_{S,0} = \begin{bmatrix} x_{S,0} \\ y_{S,0} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{F} \mathbf{x}_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_{S,1} = \begin{bmatrix} x_{S,1} \\ y_{S,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{F} \mathbf{x}_1$$

2. Messpläne

Die zeitliche Diskretisierung von Deformationsprozessen ist ein wesentlicher Planungsschritt jeder ingenieurgeodätischen Überwachungsaufgabe. Dabei wird ausgehend von Informationen bezüglich der geforderten minimalen Detektierbarkeit einer Änderung und der linearen Änderungsgeschwindigkeit des Messobjektes auf die erforderliche Messpräzision, die Wahl des Epochenabstandes und die Epochendauer geschlossen.



Zur Wahl der Messpräzision (Standardabweichung für die Bestimmung der Deformation): $\sigma_y \leq \frac{\delta y}{5}$

. Diese Beziehung ist nützlich, wenn ausgehend vom Grenzwert für die zulässige Varianz einer Koordinate (evt. aus dem amtlich vorgeschriebenen Grenzwert abzuleiten) auf σ_y geschlossen wird und ausgehend davon, ein Minimalinkrement hergeleitet wird, ab dem man von einer stattgefundenen Änderung spricht.

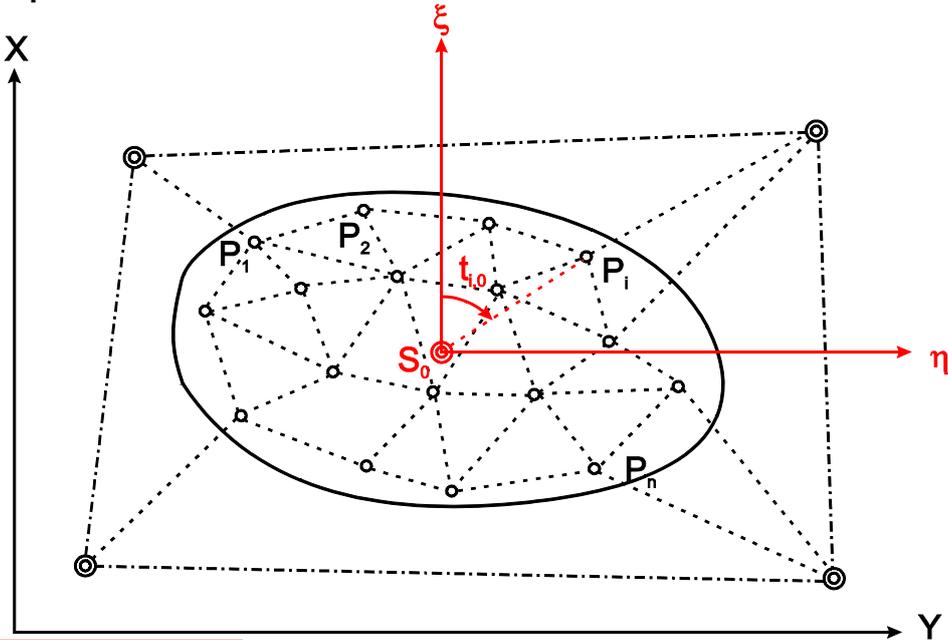
Rechenbeispiel: Für $\sigma_x^2 = (5 \text{ cm})^2$ ist $\sigma_y^2 = 2 (5 \text{ cm})^2$. Damit folgt weiterhin $\delta y \geq 35,4 \text{ cm}$ als Minimalinkrement einer 2D-Punktlage.

Zur Wahl des Epochenabstandes: $\Delta t \geq 5 \frac{\sigma_y}{|\dot{y}|}$, darin bezeichnet \dot{y} die lineare Geschwindigkeit der Änderung. Diese Beziehung ist nützlich für die Festlegung des zeitlichen Abstandes in dem die Koordinaten der Grenzpunkte zu bestimmen sind. Die Herausforderung besteht dabei einen repräsentativen Wert für die lineare Geschwindigkeit anzugeben. Diese Aufgabe ist fallbezogen und interdisziplinär zu lösen.

Zur Wahl der Epochendauer: $\delta t \leq \frac{\sigma_y}{|\dot{y}_{\max}|}$. Die Beziehung hat geringe Relevanz für die Problemstellung der Arbeitsgruppe „Bodenbewegung“.

Anlage 1

1. Null-Epoche



$$x_{S,0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,0} ; y_{S,0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{S,0} \quad \text{- Koordinaten des Schwerpunktes}$$

$$\mathbf{x}_{S,0} = \begin{bmatrix} x_{S,0} \\ y_{S,0} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{F} \mathbf{x}_0 \quad \text{- Kovarianzmatrix des Schwerpunktes}$$

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{F}^T \mathbf{x}_{S,0} = \mathbf{x}_0 - \frac{1}{n} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{x}_0 = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \right) \mathbf{x}_0 = \mathbf{G} \mathbf{x}_0 \quad \text{- Schwerpunkt-Koordinaten-System}$$

Koordinaten-System

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi_0} = \mathbf{G} \boldsymbol{\Sigma}_{xx_0} \mathbf{G}^T \quad \text{- Kovarianzmatrix im Schwerpunkt-Koordinatensystem}$$

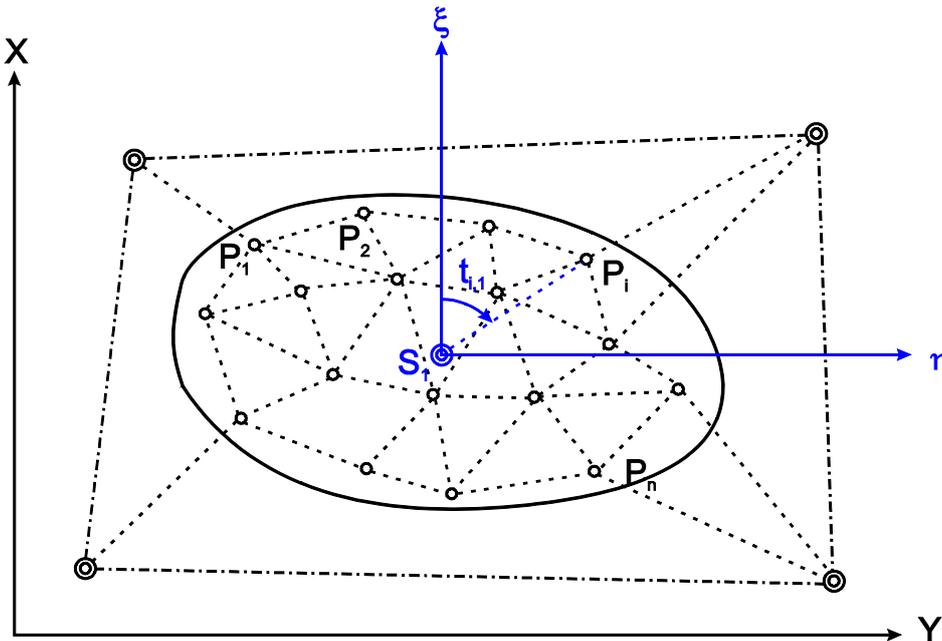
$$t_i = \arctan \frac{\eta_i}{\xi_i} , i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{- Richtungswinkel}$$

In linearisierter Form (TAYLOR-Entwicklung):

$$\mathbf{t}_0 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \mathbf{H} \boldsymbol{\xi}_0 \quad \text{- Richtungsvektor}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t_0} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi_0} \mathbf{H}^T \quad \text{- Kovarianzmatrix des Richtungsvektors}$$

2. Folge-Epoche Nr.1



$$\mathbf{x}_{S,1} = \begin{bmatrix} x_{S,1} \\ y_{S,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2,2n} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}_{2n,1} = \frac{1}{n} \mathbf{F} \mathbf{x}_1 \quad - \text{Koordinaten des Schwerpunktes}$$

$$\Sigma_{SS_1} = \frac{1}{n^2} \mathbf{F} \Sigma_{XX} \mathbf{F}^T \quad - \text{Kovarianzmatrix des Schwerpunktes}$$

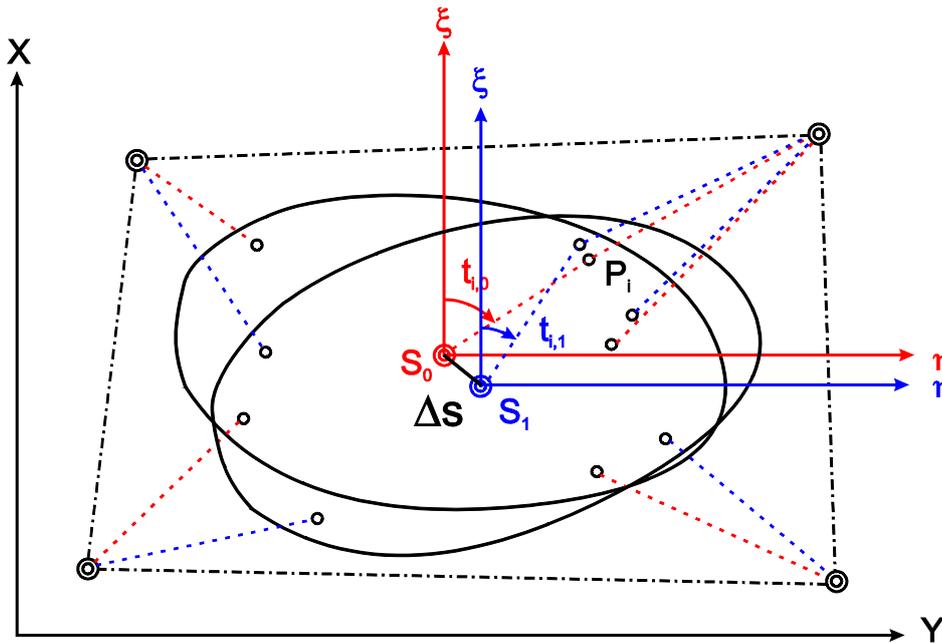
$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \end{pmatrix}_{2n,2n} \mathbf{x}_1 = \mathbf{G} \mathbf{x}_1 \quad - \text{Schwerpunkt-Koordinaten-System}$$

$$\Sigma_{\xi\xi_0} = \mathbf{G} \Sigma_{XX} \mathbf{G}^T \quad - \text{Kovarianzmatrix des Schwerpunkt-Systems}$$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}_{n,1} = \mathbf{H} \xi_1 \quad - \text{Richtungsvektor}$$

$$\Sigma_{tt_1} = \mathbf{H} \Sigma_{\xi\xi_1} \mathbf{H}^T \quad - \text{Kovarianzmatrix des Richtungsvektors}$$

2.1.3 Epochenvergleich



Verschiebung des Objektes:

$$\mathbf{x}_{S,0} = \begin{bmatrix} x_{S,0} \\ y_{S,0} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{F} \mathbf{x}_0 \quad - \text{Schwerpunkt-Koordinaten der Null-Epoche}$$

$$\Sigma_{SS_0} = \frac{1}{n^2} \mathbf{F} \Sigma_{XX_0} \mathbf{F}^T \quad - \text{Kovarianzmatrix des Schwerpunktes}$$

$$\mathbf{x}_{S,1} = \begin{bmatrix} x_{S,1} \\ y_{S,1} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{F} \mathbf{x}_1 \quad - \text{Schwerpunkt-Koordinaten der Folge-Epoche}$$

$$\Sigma_{SS_1} = \frac{1}{n^2} \mathbf{F} \Sigma_{XX_1} \mathbf{F}^T \quad - \text{Kovarianzmatrix des Schwerpunktes}$$

$$\Delta_S = \begin{bmatrix} \Delta x_S \\ \Delta y_S \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{S,1} - \mathbf{x}_{S,0} \quad - \text{Schwerpunkt-Verschiebung}$$

$$\Sigma_{\Delta S} = \Sigma_{SS_1} + \Sigma_{SS_0} \quad - \text{Kovarianzmatrix der Verschiebung}$$

Test auf Verschiebung:

Nullhypothese : Keine Objekt-Verschiebung $H_0: E(\Delta_S) = 0$

Alternativhypothese : Objekt-Verschiebung signifikant $H_A: E(\Delta_S) \neq 0$

Testgröße: $\Delta_S^T \Sigma_{\Delta S}^{-1} \Delta_S \sim \chi_2^2$

Testentscheidung: $\Delta_S^T \Sigma_{\Delta\Delta_S}^{-1} \Delta_S \leq \chi_{2,1-\alpha}^2$: H_0 nicht verwerfen !

$\Delta_S^T \Sigma_{\Delta\Delta_S}^{-1} \Delta_S > \chi_{2,1-\alpha}^2$: H_0 verwerfen !

Rotation um den Schwerpunkt:

$$\mathbf{t}_{n,1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}_0 = \mathbf{H} \boldsymbol{\xi}_{n,2n,2n,1} \quad \text{- Richtungsvektor der Null-Epoche}$$

$$\Sigma_{\mathbf{t}_{n,1}} = \mathbf{H} \Sigma_{\boldsymbol{\xi}_{n,2n,2n,1}} \mathbf{H}^T \quad \text{- Kovarianzmatrix des Richtungsvektors}$$

$$\mathbf{t}_{n,1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}_1 = \mathbf{H} \boldsymbol{\xi}_{n,2n,2n,1} \quad \text{- Richtungsvektor der Folge-Epoche}$$

$$\Sigma_{\mathbf{t}_{n,1}} = \mathbf{H} \Sigma_{\boldsymbol{\xi}_{n,2n,2n,1}} \mathbf{H}^T \quad \text{- Kovarianzmatrix des Richtungsvektors}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{t}_{n,1} - \mathbf{t}_{n,0} \quad \text{- Rotationswinkel}$$

$$\Sigma_{\boldsymbol{\omega}} = \Sigma_{\mathbf{t}_{n,1}} + \Sigma_{\mathbf{t}_{n,0}} \quad \text{- Kovarianzmatrix}$$

$$\omega = \frac{1}{n} \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega} \quad \text{- mittlerer Rotationswinkel}$$

$$\sigma_\omega^2 = \mathbf{e}^T \Sigma_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{e} \quad \text{- Varianz des Rotationswinkels}$$

Test auf Rotation:

Nullhypothese : Keine Objekt-Rotation $H_0: E(\omega) = 0$

Alternativhypothese : Objekt-Rotation signifikant $H_A: E(\omega) \neq 0$

$$\text{Testgröße: } y = \frac{\omega}{\sigma_\omega} \sim N(0,1)$$

Testentscheidung: $y = \frac{\omega}{\sigma_\omega} \leq y_{1-\frac{\alpha}{2}}$: H_0 nicht verwerfen !

$$y = \frac{\omega}{\sigma_{\omega}} > y_{1-\frac{\alpha}{2}} : H_0 \text{ verwerfen !}$$

Mit freundlichen Grüßen,

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Hans Neuner
Leiter der Forschungsgruppe Ingenieurgeodäsie